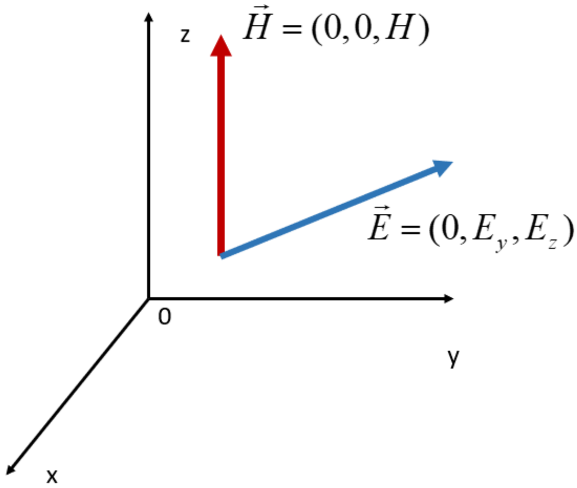
Лекція № 15

4.10. Нерелятивістський рух у перехрещених полях. Дрейфова швидкість

Задачу про рух заряду у перехрещених однорідних та постійних полях розглянемо для нерелятивістського випадку малих швидкостей $(\upsilon \ll c)$. Нехай магнітне поле направлене уздовж осі z $\vec{H} = (0, 0, H)$, а напруженість електричного поля лежить у площині y0z $\vec{E} = (0, E_y, E_z)$



Для класичної частинки $\vec{p} = m\vec{\upsilon} = m\dot{\vec{r}}$. Рівняння руху (4.15) матиме вигляд

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{\upsilon}, \vec{H}\right]. \tag{4.91}$$

В проекціях на осі декартових координат для обраних напрямків напруженостей полів

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \dfrac{eH}{c}\dot{y}; \\ m\ddot{y} = eE_y - \dfrac{eH}{c}\dot{x}; \\ m\ddot{z} = eE_z; \end{cases} \tag{4.92}$$

або

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y}; \\ \ddot{y} = \dfrac{eE_y}{m} - \omega \dot{x}; \\ \ddot{z} = \dfrac{eE_z}{m}; \end{cases} \tag{4.93}$$

Тут $\omega = \omega_{cl} = \dfrac{eH}{mc}$.

Початкові умови обираємо такі:

$$\vec{\upsilon}(0) = (\upsilon_{0x}, 0, \upsilon_{0z}); \quad \vec{r}(0) = 0. \tag{4.94}$$

Уздовж осі z відбувається рівноприскорений рух:

$$\upsilon_z(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{eE_z}{m} t + \upsilon_{0z};$$

$$z(t) = \frac{eE_z}{2m} t^2 + \upsilon_{0z} t.$$

Для пошуку закону руху в площині x0y зручно ввести комплексну змінну $\zeta = (\dot{x} + i\dot{y})$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y}; & \Big| \cdot 1 \\ \ddot{y} = \dfrac{eE_y}{m} - \omega \dot{x}; & \Big| \cdot i \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) = -i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) + i\left(\frac{eE_y}{m}\right);$$

Отримали для ζ неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{d\zeta}{dt} + i\omega\zeta = i\left(\frac{eE_y}{m}\right). \tag{4.95}$$

Розв'язок такого рівняння складається із загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння

$$\zeta = \zeta_{одн.} + \zeta_{неодн.}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} + i\omega\zeta = 0; \quad \zeta_{одн.} = ae^{-i\omega t};$$

Права частина неоднорідного рівняння – стала величина. Частинний розв’язок для такого випадку шукають у вигляді також константи

$$\zeta_{неодн.} = A; \quad \frac{d}{dt}A + i\omega A = i\left(\frac{eE_y}{m}\right); \quad i\omega A = i\left(\frac{eE_y}{m}\right);$$

$$A = \frac{eE_y}{m\omega} = \frac{\cancel{e}E_y}{\cancel{m}}\frac{\cancel{m}c}{\cancel{e}H} = \frac{E_y}{H}c; \quad A = \frac{E_y}{H}c.$$

Загальний розв’язок

$$\zeta = ae^{-i\omega t} + \frac{E_y}{H}c.$$

Врахуємо початкові умови (4.94):

$$\zeta(0) = a + \frac{E_y}{H}c = \upsilon_{0x}; \quad a = \upsilon_{0x} - \frac{E_y}{H}c;$$

$$\zeta(t) = \upsilon_x(t) + i\upsilon_y(t) = \left(\upsilon_{0x} - \frac{E_y}{H}c\right)(\cos\omega t - i\sin\omega t) + \frac{E_y}{H}c;$$

Проекції швидкості на площину x0y

$$\begin{cases} \upsilon_x(t) = \left(\upsilon_{0x} - \frac{E_y}{H}c\right)\cos\omega t + \frac{E_y}{H}c; \\ \upsilon_y(t) = -\left(\upsilon_{0x} - \frac{E_y}{H}c\right)\sin\omega t; \end{cases} \tag{4.96}$$

Середні значення проекція швидкості за один період

$$\overline{\upsilon_x} = \frac{E_y}{H}c; \quad \overline{\upsilon_y} = 0.$$

У напрямку, перпендикулярному обом полям (при даному виборі це вісь *x*), відбувається зсув зі сталою швидкістю

$$\upsilon_{др.} = \frac{E_y}{H}c. \tag{4.97}$$

Швидкість зсуву (4.97) називають дрейфовою швидкістю. Вона входить в формули для залежності проекцій швидкості (4.96).

Шукаємо закон руху в площині x0y

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \left(\upsilon_{0x} - \upsilon_{\partial p.}\right)\cos\omega t + \dfrac{E_y}{H}c; \\ \dfrac{dy}{dt} = -\left(\upsilon_{0x} - \upsilon_{\partial p.}\right)\sin\omega t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\omega}\left(\upsilon_{0x} - \upsilon_{\partial p.}\right)\sin\omega t + \dfrac{E_y}{H}ct; \\ y(t) = \dfrac{1}{\omega}\left(\upsilon_{0x} - \upsilon_{\partial p.}\right)(\cos\omega t - 1). \end{cases} \tag{4.98}$$

В (4.98) вже враховані обрані початкові умови. Закон руху в проекціях на осі декартових координат є таким

$$\begin{cases} x(t) = r_\perp \sin\omega t + \upsilon_{\partial p.}t; \\ y(t) = r_\perp(\cos\omega t - 1); \\ z(t) = \dfrac{eE_z}{2m}t^2 + \upsilon_{0z}t \end{cases} \tag{4.99}$$

$$\omega = \frac{eH}{mc}; \quad r_\perp = \frac{1}{\omega}\left(\upsilon_{0x} - \upsilon_{\partial p.}\right); \quad \upsilon_{\partial p.} = \frac{E_y}{H}c.$$

За рівноприскорений рух уздовж осі z відповідає проекція напруженості електричного поля уздовж осі z E_z. Нерелятивістським такий рух буде за умови $\upsilon_{0z} \ll c, \dfrac{eE_z t}{m} \ll c.$ В площині x0y нерелятивістським рух можна вважати за умов $\upsilon_{\partial p.} \ll c$, тобто коли $E_y \ll H$.

В площині x0y рух складається із двох рухів: обертання по окружності радіусу $r_\perp$ зі сталою кутовою частотою ω та рівномірного руху уздовж осі x з дрейфовою швидкістю $\upsilon_{\partial p.}$. Швидкість дрейфу перпендикулярна площині, в якій лежать вектори напруженостей електричного та магнітного полів. Можна записати дрейфову швидкість у векторному вигляді

$$\vec{\upsilon}_{\partial p.} = c\frac{\left[\vec{E},\vec{H}\right]}{H^2}. \tag{4.100}$$

Походження електричного дрейфу можна пояснити так. Заряджена частинка, яка обертається навколо напрямку магнітного поля $\vec{H}$ на одній половині окружності прискорюється електричним полем, а на другій половині окружності – сповільнюється електричним полем. Можна розглядати це, як зміну радіусу обертання. Така «умовна» зміна радіусу й призводить до зміщення уздовж напрямку, перпендикулярного обом полям.

З формули (4.97) (або (4.100)) видно, що дрейфова швидкість не залежить ні від величини заряду, ні від енергії частинки. Дрейфова швидкість визначається однаково як для нерелятивістського, так й релятивістського заряду. Очевидно, що нейтральні частинки $e=0$ не дрейфують, бо для них радіус обертання є нескінченним $r_\perp \sim 1/\omega \sim mc/eH \to \infty$.

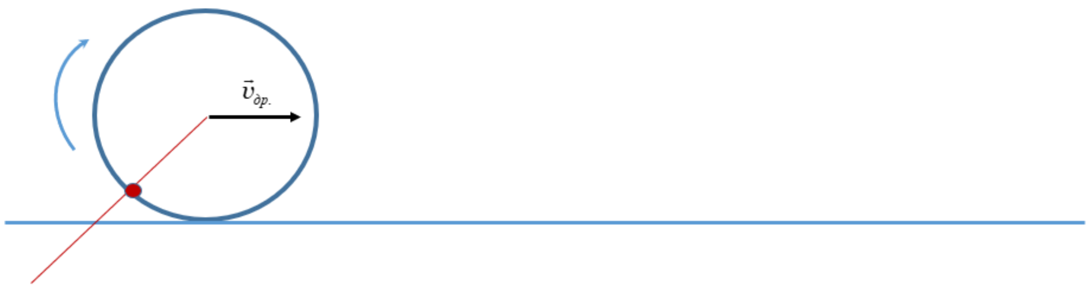
Проаналізуємо більш детально рух в площині x0y. Рух відбувається по траєкторії, яка параметрично задана так:

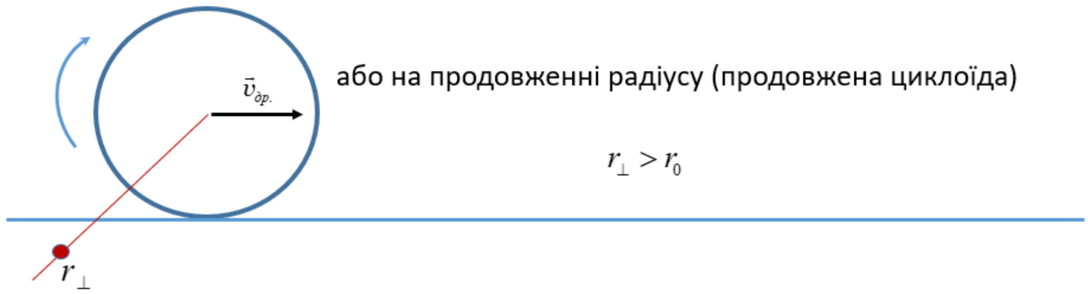
$$\begin{aligned} x(t) &= r_\perp \sin\omega t + \upsilon_{\partial p.} t; \\ y(t) &= r_\perp (\cos\omega t - 1); \end{aligned} \tag{4.101}$$

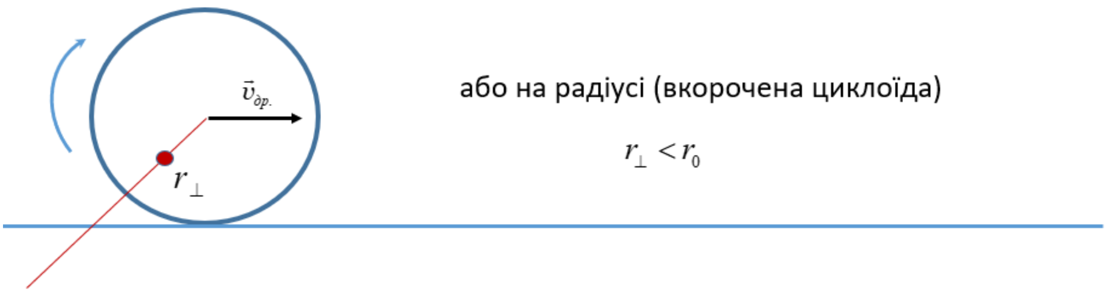
Тут $\dfrac{1}{\omega}\left(\upsilon_{0x} - \upsilon_{\partial p.}\right)$.

Формули (4.101) – це параметричне рівняння «трохоїди». Трохоїда є узагальненням «циклоїди».

Рух по циклоїді виконує точка, яка знаходиться на окружності радіусу, якщо центр окружності рухається з постійною швидкістю без ковзання по прямій.





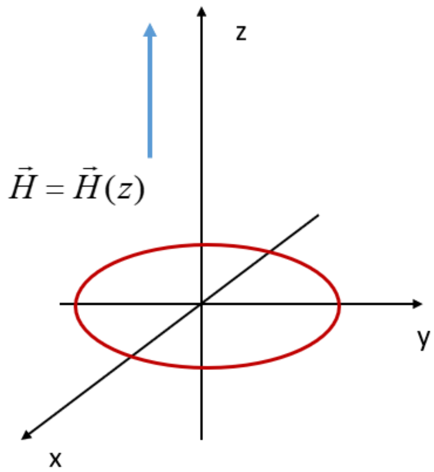


Рух по трохоїді – рух точки, яка знаходиться або на продовженні радіусу, або на радіусі, зокрема на окружності.

Нижче приведені різні випадки

4.11. Рух в слабко неоднорідному магнітному полі. «Магнітне дзеркало»

В постійному однорідному магнітному полі заряд рухається по гвинтовій лінії постійного радіусі із постійним кроком гвинта. Дослідимо, як зміниться характер руху, якщо поле є неоднорідним, але постійним. Нехай поле слабко змінюється уздовж осі z. Що означає «слабко»? Припустимо, що крок гвинта $h \ll a$, де a – характерна відстань суттєвої зміни поля.



Скористаємось поняттям адіабатичних інваріантів, відомим з курсу класичної механіки. При повільній зміні параметрів задачі в разі фінітного руху криволінійний інтеграл по траєкторії

$$I_i = \frac{1}{2\pi}\oint p_i dq_i \tag{4.102}$$

при заданих значеннях енергії та параметра, що змінюється (в даному випадку це напруженість магнітного поля), є інваріантом. p_i, q_i – узагальнені координати та імпульси.

В площині x0y рух в магнітному полі є фінітним. Побудуємо відповідний адіабатичний інваріант

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint \vec{P}_\perp d\vec{r}_\perp .$$

Траєкторія руху за один оберт практично не змінюється – це окружність (плоска крива), яка лежить в площині x0y, тому можна замість проекції узагальненого імпульсу на площину x0y в інтегралі для адіабатичного інваріанта написати повний узагальнений імпульс $\vec{P} = \vec{P}_\perp + \vec{P}_\parallel$, а не проекцію на площину, перпендикулярну магнітному полю.

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint \vec{P}_\perp d\vec{r}_\perp = \frac{1}{2\pi}\oint \vec{P} d\vec{r}_\perp . \tag{4.103}$$

Шукаємо узагальнений імпульс

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}} = \frac{\partial}{\partial \vec{\upsilon}}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{\upsilon}\right) = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\vec{A} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

Підставимо цей імпульс в формулу (4.103)

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)d\vec{r}_\perp = \frac{1}{2\pi}\oint \vec{p} d\vec{r}_\perp + \frac{1}{2\pi}\frac{e}{c}\oint \vec{A} d\vec{r}_\perp = $$
$$= \frac{1}{2\pi}\oint \vec{p}_\perp d\vec{r}_\perp + \frac{1}{2\pi}\frac{e}{c}\oint \vec{A} d\vec{r}_\perp .$$

В постійному магнітному полі зберігається «кінетична» енергія заряду та модуль імпульсу, з яким заряд потрапив до поля

$$\varepsilon = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} = const;$$
$$|\vec{p}| = const.$$

Швидкість руху та імпульс змінюється тільки по напрямку. Завжди $\vec{\upsilon}_\perp \,||\, \vec{p}_\perp \,||\, d\vec{r}_\perp$.

Зміною поля за один оберт (за період обертання) нехтуємо, тому вважаємо в криволінійному інтегралі $\oint \vec{p}_\perp d\vec{r}_\perp$ $\vec{p}_\perp = const$:

$$\oint \vec{p}_\perp d\vec{r}_\perp = p_\perp 2\pi r_\perp .$$

Криволінійний інтеграл $\oint \vec{A} d\vec{r}_\perp$ перетворимо згідно з теоремою Стокса в інтеграл по поверхні

$$\oint \vec{A} d\vec{r}_\perp = \iint \mathrm{rot}\vec{A} d\vec{S} = \iint \vec{H} d\vec{S} = H\pi r_\perp^2 .$$

В даному випадку – це круг радіусу $r_\perp$. Маємо

$$I = p_\perp r_\perp + \frac{eH}{2c} r_\perp^2 .$$

Тут $r_\perp = \dfrac{cp_\perp}{eH}$ – радіус орбіти в постійному однорідному магнітному полі, тому

$$I = p_\perp \frac{cp_\perp}{eH} + \frac{eH}{2c}\left(\frac{cp_\perp}{eH}\right)^2 = \frac{3}{2}\frac{cp_\perp^2}{eH} = const$$

Отримали такий інваріант

$$I = \frac{3}{2}\frac{cp_\perp^2}{eH(z)} . \tag{4.104}$$

Звідси бачимо, що абсолютна величина проекції імпульсу на площину, перпендикулярну напрямку магнітного поля, змінюється з зміною поля за формулою

$$p_\perp = \left(\frac{2}{3}\frac{eH(z)}{c} I\right)^{1/2} = \alpha\sqrt{H(z)} . \tag{4.105}$$

В постійному магнітному полі зберігається «кінетична» енергія, тому квадрат кінематичного імпульсу є сталою величиною

$$p^2 = p_\perp^2 + p_\parallel^2 ;$$

Зміна квадрату проекції імпульсу на напрямок поля відбувається згідно формули

$$p_\parallel^2 = p^2 - \alpha^2 H(z) \geq 0 . \tag{4.106}$$

Це означає, що зі збільшенням поля паралельна полю складова імпульсу поступово зменшується до нуля. Рух у напрямку поля можливий тільки, якщо величина поля

$$H(z) \le \frac{p^2}{\alpha^2}. \tag{4.107}$$

Дослідимо тепер зміну радіусу орбіти та кутову швидкість обертання:

$$r_\perp = \frac{cp_\perp}{eH(z)} = \frac{c\alpha}{e}\frac{1}{\sqrt{H(z)}} \sim \frac{1}{\sqrt{H(z)}};$$

$$\omega = \frac{ceH(z)}{\varepsilon} \sim H(z).$$

Радіус орбіти зменшується, як $\frac{1}{\sqrt{H(z)}}$, а кутова швидкість збільшується прямо пропорційно полю $H(z)$.

Крок гвинта

$$h = \upsilon_z T = \upsilon_z \frac{2\pi}{\omega} = \upsilon_z \frac{2\pi\varepsilon}{ceH(z)} = \frac{2\pi cp_\parallel}{eH(z)} = \frac{2\pi c}{e}\frac{\sqrt{p^2 - \alpha^2 H(z)}}{H(z)} =$$
$$= \frac{2\pi c}{e}\sqrt{\frac{p^2}{H(z)^2} - \frac{\alpha^2}{H(z)}} \sim \sqrt{\frac{p^2}{H(z)^2} - \frac{\alpha^2}{H(z)}}.$$

зі зростанням поля зменшується.

Таким чином, зі зростанням поля радіус орбіти зменшується, крок гвинта зменшується, а кутова швидкість збільшується. В критичному полі проекція імпульсу на напрямок магнітного поля звертається до нуля, Заряд відбивається від поля, та починає рухатися у зворотному напрямку. Напрямок обертання не змінюється.

Нижче наведений графік траєкторії руху, характерної для магнітного дзеркала.